

SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

A. FAVINI

EQUAZIONI PARABOLICHE ASTRATTE E APPLICAZIONI
(Seconda Parte)

11 FEBBRAIO 1988

INTRODUZIONE

In questo seminario vorrei descrivere alcuni esempi di applicazione dei risultati astratti di cui ho parlato nel mio precedente Seminario.

Vediamo di ricordare i principali teoremi astratti ottenuti.

Siano $L(t), M(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, famiglie di operatori lineari chiusi da Y in X , X, Y due spazi di Banach complessi, tali che

- i) Esiste $L(t)^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X) \quad \forall t$;
- ii) $D(L(t)) \subset D(M(t)) \quad \forall t$;
- iii) $t \rightarrow M(t)L(t)^{-1} = T(t) \in C[0, \tau; \mathcal{L}(X)]$
- iv) $t \rightarrow L(t)^{-1} \in C[0, \tau; \mathcal{L}(X, Y)]$
- v) $\|(zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq \text{Costante} \quad \forall z, \operatorname{Re} z \geq 0, 0 \leq t \leq \tau$,
- vi) $T(\cdot) \in C^{(1)}[0, \tau; \mathcal{L}(X)]$ e

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (zT(t)+1)^{-1}; \mathcal{L}(X) \right\| \leq C(1+|z|)^{1-\rho}, \quad 0 < \rho \leq 1,$$

$$\text{vii) } \|T'(t) - T'(s); \mathcal{L}(X)\| \leq c|t-s|^\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1.$$

Diciamo che è soddisfatta l'ipotesi (H) se

(H) C'è uno spazio di Banach $Y_1 \subset Y$ con continuità tale che

$$\|L(t)^{-1} - L(s)^{-1}; \mathcal{L}(X, Y_1)\| \leq k|t-s|^\alpha, \quad \forall t, s \in [0, \tau], \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Le prossime assunzioni riguardano la non linearità f :

(K) $(t, y) \rightarrow f(t, y)$ è di classe $C^{(1)}$ da $[0, \tau] \times V$ in X , dove V è un intorno di $u_0 \in Y_1 \cap D(L(0))$ in Y_1 e

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial f}{\partial x}(s, x_2); \mathcal{L}(Y_1; X) \right\| \leq k(|t-s|^\beta + |x_1 - x_2; Y_1|),$$

$$t, s \in [0, \tau], \quad x_1, x_2 \in V,$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x}(0, u_0); \mathcal{L}(Y_1; X) \right\| \leq \eta, \quad \eta \text{ piccolo};$$

$$(L) \quad \omega_0 = M(0)u_0,$$

$$f(0, u_0) - (I + T'(0))L(0)u_0 \in R(T(0)).$$

Vale allora il

Teorema 1. Sotto le ipotesi (i)-(vii), (H), (K), (L), sia

$$0 < \nu < \rho \in \quad, \quad \nu \leq \alpha, \beta \leq 1.$$

Se τ e η sono sufficientemente piccoli, c'è una unica soluzione stretta del problema

$$(P) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) + L(t)u(t) = f(t, u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = \omega_0, \end{cases}$$

tale che $L(\cdot)u(\cdot), \frac{d}{dt}(M(\cdot)u(\cdot)) \in C^0[0, \tau; X]$.

Il TEOREMA 1 permette di trattare, attraverso un procedimento di linearizzazione, problemi più generali di (P).

Sia $M(t), 0 \leq t \leq \tau$, una famiglia di operatori lineari chiusi da Y_1 in X e sia $g = g(t, u)$ una applicazione da $[0, \tau] \times V$ a X , V intorno di $u_0 \in Y_1$, X, Y_1 spazi di Banach.

$$\text{Sia } g \in C^{(1)}, \text{ con } \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_0) = -\mathcal{L}(t) \in \mathcal{L}(Y_1; X).$$

Il problema

$$(P)_1 \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = g(t, u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = \omega_0 \end{cases}$$

viene scritto nella forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -\mathcal{L}(t)u(t) + \{g(t, u(t)) + \mathcal{L}(t)u(t)\}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = \omega_0. \end{cases}$$

Sia $Y(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, un sottospazio di Y_1 tale che la restrizione $L(t)$ di $\mathcal{L}(t)$ a $Y(t)$ soddisfi tutte le assunzioni (i)-(vii).

Allora il TEOREMA 1 permette di risolvere

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) = -L(t)u(t) + \{g(t, u(t)) + \mathcal{L}(t)u(t)\}, & 0 \leq t \leq \tau, \\ M(t)u(t)|_{t=0} = \omega_0, \end{cases}$$

purché

$$(M) \quad \begin{cases} \omega_0 = M(0)u_0, \text{ con } u_0 \in Y(0), \\ L(t) \text{ soddisfi (H)}, \\ \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t, u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s, u_2); \mathcal{L}(Y_1; X) \right\| \leq k(|t-s|^\beta + \|u_1 - u_2; Y_1\|), & 0 \leq t, s \leq \tau, \quad u_i \in V, \\ g(0, u_0) - T'(0)u_0 \in R(T(0)). \end{cases}$$

Si noti che per $F(t, u) = g(t, u) - \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_0)u$ si ha $\frac{\partial F}{\partial u}(0, u_0) = 0$.

Dunque,

Teorema 2. Sotto le ipotesi (i)-(vii) e (M), se $0 < v < \rho \leq 1$, $v \leq \alpha, \beta \leq 1$, c'è una soluzione (locale nel tempo) stretta u di $(P)_1$, tale che $u(t) \in D(L(t))$ $\forall t \in [0, \tau]$ e $t \rightarrow \frac{d}{dt}(M(t)u(t)) \in C^v[0, \tau; X]$.

Se g è definita da $[0, \tau] \times Y_1$ a X , è $C^{(1)}$ e $\frac{\partial g}{\partial u}(t, u)$ ha le proprietà

$$(N) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\| \frac{\partial g}{\partial u}(t, u_1) - \frac{\partial g}{\partial u}(s, u_2); \mathcal{L}(Y_1; X) \right\| \leq h(|t-s|^\beta + \|u_1 - u_2; Y_1\|) \\ \forall t, s \in [0, \tau], u_j \in V, \text{ intorno di } u_0 \text{ in } Y_1; \\ \text{Posto } - \frac{\partial g}{\partial u}(0, u_0) = L, \text{ risulta} \\ \|L(zM+L)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq \text{costante}, \operatorname{Re} z \geq 0 \quad (M=M(t)), \end{array} \right.$$

allora con tecnica analoga si ottiene il

Teorema 3. Valga (N) e sia $\omega_0 = Mu_0, u_0 \in Y_1$, con $g(0, u_0) \in R(ML^{-1}) = M(Y_1)$.

Allora c'è una soluzione stretta locale u di $(P)_1$ tale che

$$t \rightarrow \frac{d}{dt}(Mu(t)) \in C^v[0, \tau; X] \text{ per ogni } 0 < v \leq \beta, v < 1.$$

APPLICAZIONE 1. Siano $a_0(t; u, v), u, v \in H_0^m(\Omega), m \geq 1$, Ω aperto limitato di R^n con $\partial\Omega$ regolare, oppure $\Omega = R^n$, $a_1(x, y), x, y \in W$, W spazio di Hilbert con $V = H_0^m(\Omega) \hookrightarrow W \hookrightarrow L^2(\Omega)$ forme sesquilineari su V e W , rispettivamente, tali che

$$|a_0(t;u,v)| \leq C_1 \|u;V\| \|v;V\|,$$

$$\operatorname{Re} a_0(t;u,u) \geq C_2 \|u;V\|^2, \quad C_2 > 0,$$

$$|a_1(x,y)| \leq C_3 \|x;W\| \|y;W\|,$$

$$a_1(u,u) \geq 0 \quad \forall u \in V,$$

$$\exists \frac{d}{dt} a_0(t;u,v) = a'_0(t;u,v) \quad \forall u,v \in V \text{ e}$$

$$|a'_0(t;u,v)| \leq C_4 \|u;V\| \|v;V\|,$$

$$|a'_0(t;u,v) - a'_0(s;u,v)| \leq C_5 |t-s|^a \|u;V\| \|v;V\|, \quad 0 < a < 1.$$

Siano $L(t)$ e M gli operatori lineari limitati da V in V^* e da W in W^* associati ad $a_0(t;u,v)$ e ad $a_1(x,y)$, rispettivamente. Si vede facilmente che (i)-(vii) e (H) sono soddisfatte, con $X=Y^*=V$, $Y=W$, $\rho=1$, $\epsilon=a$. Infatti,

$$\|L(t) - L(s); L(V; V^*)\| \leq k |t-s|, \quad 0 \leq t, s \leq \tau,$$

implica che (H) è vera con $\alpha = 1, [7]$.

Sia a una funzione a valori reali tale che

$$a(u(x), Du(x), \dots, D^k u(x)), \quad a \text{ di classe } C^{(2)},$$

k intero non negativo, abbia senso per ogni $u \in V = H_0^m(\Omega)$: $k \leq m$.

Vogliamo applicare il TEOREMA 1, con

$$f(u)(x) = a(u(x), \dots, D^k u(x)).$$

Se $u, v \in V$,

$$\begin{aligned}
(F(u+v)-F(u))(x) &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \eta} a(u(x)+\eta v(x), \dots, D^k u(x)+\eta D^k v(x)) d\eta = \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial a}{\partial \xi_0} (u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x)) v(x) + \frac{\partial a}{\partial \xi_1} (u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x)) Dv(x) + \dots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial a}{\partial \xi_k} (u^{(i)}(x)+\eta v^{(i)}(x)) D^k v(x) \right] d\eta
\end{aligned}$$

Sia $\|u;V\|, \|v;V\| \leq r$. Allora

$$\begin{aligned}
& \left(\int_{\Omega} \left| [f(u+v)-f(u)](x) - \left[\frac{\partial a}{\partial \xi_0} (u^{(i)}(x)) v(x) + \frac{\partial a}{\partial \xi_1} (u^{(i)}(x)) Dv(x) + \dots + \frac{\partial a}{\partial \xi_k} (u^{(i)}(x)) D^k v(x) \right] \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\
& \leq M(r) \left\{ \left(\int_{\Omega} (|v(x)| + \dots + |D^k v(x)|)^2 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \dots + \right. \\
& \quad \left. + \left(\int_{\Omega} (|v(x)| + \dots + |D^k v(x)|)^2 |D^k v(x)|^2 dx \right)^{1/2} \right\} \leq \\
& \leq M'(r) \left(\sup_{\Omega} |v(x)| + \dots + \sup_{\Omega} |D^k v(x)| \right) \|v;V\|
\end{aligned}$$

Ora, se $k + \frac{n}{2} < m$, possiamo applicare il Teorema di immersione di Sobolev [per es. Pazy, pp. 208 e 222] e dedurre che vale una stima del tipo

$$M''(r) \|v;V\|^2;$$

e così f è differenziabile come applicazione da V in H , quindi, anche da V in V^* .

Analogamente, sempre il teorema di Sobolev assicura che $f'(u)$ è localmente lipschitz-continua.

In definitiva, il TEOREMA 1 si applica a problemi del tipo

$$\frac{\partial}{\partial t} (M(x,D)u(t,x)) + L(t,x,D)u(t,x) = a(u(x), \dots, D^k u(x)),$$

$$0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \Omega,$$

$$u(t, \cdot) \in H_0^m(\Omega),$$

$$M(x,D)u(0,x) = M(x,D)u_0(x),$$

con u_0 sufficientemente regolare,

$$\sup_{\Omega} \left| \frac{\partial}{\partial \xi_j} a(u_0(x), \dots, D^k u_0(x)) \right|, \quad j=0,1,\dots,k,$$

piccolo, $k + \frac{n}{2} < m_0$ e

$$a(u_0(\cdot), \dots, D^k u_0(\cdot)) - (I + T'(0))L(0, \cdot, D)u_0(\cdot) \in M(V).$$

Per esempio, se $n=1$, k può arrivare a $m-1$ e, se $L(t) \equiv L$, l'ultima condizione diventa

$$a(u_0(x), \dots, D^k u_0(x)) - L(x,D)u_0(x) = M(x,D)w(x),$$

per un certo $w \in H_0^m(\Omega)$.

APPLICAZIONE 2. Sia $C[0,1;K] = C$ lo spazio di tutte le funzioni continue da $[0,1]$ in $K (= \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C})$, con

$$\|f\| = \max_x |f(x)|$$

Sia $C_{0,0} = \{\phi \in C: \phi(0) = \phi(1) = 0\}$ e si ponga

$$\mathcal{D}(A) = D(A) = \{\phi \in C_{0,0} : \phi' \in C, \phi'' \in C_{0,0}\},$$

$$A\phi = -\phi'', \quad \phi \in D(A).$$

E' ben noto [3, p. 312] che $-A$ è il generatore infinitesimale di un semigruppato analitico in $C_{0,0}$.

Osserviamo che si possono trovare altre condizioni ai limiti per i quali vale ancora la stessa conclusione [cfr. sempre 3].

Notiamo [2, p. 192] che $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\|u'; C\| \leq \frac{1}{n+2} \|u; C\| + 2(n+1) \|u; C\|.$$

Sia $\psi: [0, \tau] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ di classe $C^{(2)}$ e si ponga

$$f(t, u)(x) = \psi(t, u(x), u'(x), u''(x)) \quad , \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in [0, 1].$$

Ripetendo discorsi analoghi a quelli della APPLICAZIONE 1 (in questo caso, non c'è bisogno di scomodare il Teorema di immersione), si vede che f è regolare e

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f}{\partial u}(t, u)h \right](x) &= \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1}(t, u(x), u'(x), u''(x))h(x) + \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2}(t, u(x), u'(x), u''(x))h'(x) + \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_3}(t, u(x), u'(x), u''(x))h''(x). \end{aligned}$$

Per utilizzare il TEOREMA 1 nella trattazione del problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \psi(t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 1) = 0,$$

si dovrà allora assumere che

$$\max_j \sup_x \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}(0, u_0(x), u'_0(x), u''_0(x)) \right| \text{ è piccolo e}$$

che

$$u_0 \in C^{(4)}[0,1], u_0(0) = u_0(1) = u_0''(0) = u_0''(1) = 0 = u_0^{(4)}(0) = u_0^{(4)}(1) \text{ e}$$

$$\psi(0,0,p,0) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_1^\alpha \partial \xi_3^\beta}(0,0,p,0) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \alpha, \beta \in \{0,1,2\}, \alpha+\beta=2,$$

$$\text{oppure } u_0^{(k)}(j) = 0, \quad j = 0,1, \quad k = 0,1,\dots,4.$$

Osservazione. Invece dell'operatore A sopra considerato, si potrebbe studiare

$$A_0 u(x) = -a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x)$$

ed applicare i ben noti teoremi di perturbazione [per esempio, Kato 2] ad $A+A_0$.

Per esempio, si vede che $-(A+A_0)$ genera un semigruppato analitico in $C_{0,0}$ se $\alpha = \sup_x |a(x)|$ è piccolo e $b(0)=b(1)=0$.

La situazione diventa più complicata se uno tenta di trattare problemi parabolici analoghi a quelli della APPLICAZIONE 2 relativamente a domini Ω in \mathbb{R}^n , $n \geq 1$: vedi APPLICAZIONE 3.

Osserviamo esplicitamente che il TEOREMA 3 consente lo studio di problemi del tipo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(t, u(x), u'(x), u''(x)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

più condizioni ai limiti. Posto

$$g(t,x)(x) = g(t,u(x),u'(x),u''(x)) \quad , \quad t \in [0,\tau], \quad u \in D(A),$$

è facile vedere che se $g \in C^{(1)}$, allora

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial g}{\partial u}(t,u)v \right](x) &= \frac{\partial g}{\partial \xi_1}(t,u(x),u'(x),u''(x))v(x) + \frac{\partial g}{\partial \xi_2}(t,u(x),u'(x),u''(x))v'(x) + \\ &+ \frac{\partial g}{\partial \xi_3}(t,u(x),u'(x),u''(x))v''(x); \end{aligned}$$

quindi, si applica l'osservazione precedente se, per esempio,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial \xi_3}(0,u_0(x),u'_0(x),u''_0(x)) - 1 \right| \text{ è sufficientemente piccola } \forall x \in [0,1] \text{ e}$$

$$\frac{\partial g}{\partial \xi_2}(0,u_0(x),u'_0(x),u''_0(x)) = \frac{\partial g}{\partial \xi_2}(1,u_0(x),u'_0(x),u''_0(x)) = 0 \quad \forall x \in [0,1].$$

APPLICAZIONE 3. Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n a frontiera $\partial\Omega$ regolare. Consideriamo l'operatore differenziale del secondo ordine

$$(-Au)(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + a(x)u(x),$$

uniformemente ellittico su $\bar{\Omega}$.

Se si pone $X = C(\bar{\Omega})$, munito della norma del sup, e

$D(A) = \{u \in W^{2,p}(\Omega) : Au \in C(\bar{\Omega}), u=0 \text{ su } \partial\Omega\}$, con $p > n$, dai risultati di B. Stewart [6] segue che $-A$ genera un semigruppato analitico non fortemente continuo in $t=0$ perché $\overline{D(A)} = C_0(\bar{\Omega}) \neq X$ [vedi anche: E. Sinestrari-W. von Wahl 5].

Sia f di classe $C^{(2)}$ da \mathbb{R} in sé. Vogliamo trattare il problema

$$(P)_2 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -Au(t, x) + f(Au(t, x)), & 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \Omega, \\ u(t, \cdot) \in D(A) \quad \forall t \in [0, \tau], \\ u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{cases}$$

Poichè non è restrittivo supporre che A abbia inverso limitato, $(P)_2$ assume la forma astratta

$$\frac{d}{dt}(L^{-1}v)(t) = -v(t) + f(v(t)), \quad 0 \leq t \leq \tau,$$

$$(L^{-1}v)(t)|_{t=0} = u_0.$$

Posto $F(v)(x) = f(v(x))$, $v \in C(\bar{\Omega})$, si ha $\forall h \in C(\bar{\Omega})$, $\{F(v+h) - F(v)\}(x) - f'(v(x))h(x) =$
 $= \int_0^1 [f'(v(x) + \eta h(x)) - f'(v(x))]h(x) d\eta$; così, se $v_0 = Lu_0 \in C(\bar{\Omega})$, $\|v - v_0\|_{C(\bar{\Omega})} \leq r$,
 $\|h\|_{C(\bar{\Omega})} \leq r$, allora c'è una costante $k = k(r)$ tale che

$$|\{F(v+h) - F(v)\}(x) - f'(v(x))h(x)| \leq k \int_0^1 |h(x)|^2 d\eta \leq k \|h\|_{C(\bar{\Omega})}^2.$$

Così F è differenziabile e

$$\{F'(v)(h)\}(x) = f'(v(x))h(x), \quad x \in \bar{\Omega}.$$

Inoltre, poichè

$$F'(v_1)(h)(x) - F'(v_2)(h)(x) = [f'(v_1(x)) - f'(v_2(x))]h(x),$$

esiste $h_1 = h_1(r) > 0$ tale che $\forall v_1, v_2 \in C(\bar{\Omega})$, $\|v_i\|_{C(\bar{\Omega})} \leq r$,

si ha

$$\|F'(v_1) - F'(v_2); \mathcal{L}(C(\bar{\Omega}))\| \leq h_1 \|v_1 - v_2; C(\bar{\Omega})\|$$

Si applica il TEOREMA 1, con $X = Y_1 = Y = C(\bar{\Omega})$: si dovrà assumere che

$$\sup_{\bar{\Omega}} |f'(v_0(x))| \text{ è sufficientemente piccolo}$$

e che $x \mapsto f(v_0(x)) - v_0(x) \in D(A)$.

In particolare, se $v_0 = 0$ su $\partial\Omega$, allora dovrà essere $f(0) = 0$.

Osservazione. Si può studiare anche il problema più generale connesso con l'equazione

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -Au(t, x) + f(Bu(t, x)),$$

dove $B = B(x, D)$ è un operatore differenziale di ordine ≤ 2 . Ci si dovrà cautelare, a questo fine, che l'operatore astratto definito da BA^{-1} risulti limitato da $C(\bar{\Omega})$ in sé, cioè $\forall u \in D(A)$ si ha $u \in D(B)$ e

$$\|Bu : C(\bar{\Omega})\| \leq \text{Cost. } \|Au; C(\bar{\Omega})\|.$$

APPLICAZIONE 4. Sia Ω un dominio limitato di \mathbb{R}^n con $\partial\Omega$ regolare. Sia

$$-A(t, x, D) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t, x)I,$$

$$(t, x) \in [0, \tau] \times \bar{\Omega},$$

$$B(t, x, D) = \sum_{i=1}^n \beta_i(t, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \alpha(t, x)I, \quad (t, x) \in [0, \tau] \times \partial\Omega.$$

Assumiamo che i coefficienti soddisfino tutte le ipotesi (A1,2), (B1,2), (AB2,3) in Acquistapace-Terreni [1]. Naturalmente,

$$D(A(t)) = \{u \in C(\bar{\Omega}) \cap W^{2,q}(\Omega); A(t, \cdot)u \in C(\bar{\Omega}),$$

$$B(t, \cdot, D)u = 0 \text{ su } \partial\Omega\}, \quad q > n,$$

$$A(t)u = A(t, \cdot, D)u.$$

Sia $\phi \in C^{(2)}(\mathbb{R})$; consideriamo il problema

$$(P)_3 \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \phi(-A(t, x, D)u(t, x)), & 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ B(t, x, D)u(t, x) = 0, & 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \partial\Omega, \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases}$$

Se F è definita da

$$F(v)(x) = \phi(v(x)), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad v \in C(\bar{\Omega}),$$

allora $(P)_3$ assume la forma astratta

$$\begin{cases} u'(t) = F(-A(t)u(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

o anche, posto $A(t)u(t) = v(t)$,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(A(t)^{-1}v(t)) = F(-v(t)), & 0 \leq t \leq \tau, \\ A(t)^{-1}v(t)|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Come si è visto nell'applicazione precedente, F è differenziabile e

$$[F'(v)h](x) = \phi'(v(x))h(x), \quad v, h \in C(\bar{\Omega}).$$

Inoltre, se $\phi'(t) > 0$ per ogni t , allora $F'(-v_0)A(t)$ ha le stesse proprietà di $A(t)$; qui $v_0 = A(0)u_0$.

(Osserviamo che molto recentemente, W. von Wahl ha studiato in [8] la risolubilità globale di un problema analogo (molto più semplice) con condizioni ai limiti di tipo Dirichlet, a cui senz'altro si applica quanto sopra detto)

Così il problema è risolto se

$$F(-v_0) - Sv_0 \in D(A(0)),$$

$$\text{con } S = \frac{d}{dt}(A(t)^{-1})|_{t=0}.$$

Se $D(A(t))$ fosse indipendente da t ,

$$S = -A(0)^{-1} A'(0) A(0)^{-1}$$

e così l'ultima condizione si ridurrebbe alla

$$F(-A(0)u_0) \in D(A(0)).$$

APPLICAZIONE 5. Facendo uso delle notazioni introdotte nella APPLICAZIONE 1 del Seminario precedente, si consideri il problema

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = -A(t, x, D)u(t, x) + F(t, u(t, x)), \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \Omega,$$

$$B_j(t, x, D)u = 0, \quad 0 \leq t \leq \tau, \quad x \in \partial\Omega,$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \Omega,$$

nell'ambito della teoria L^p .

Qui

$$F(t,u)(x) = f(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x)) + \\ + \sum_{|\alpha|=2m} g_{\alpha}(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^{\alpha}u$$

Sotto opportune condizioni di regolarità su f e g_{α} , si ha

$$\begin{aligned} [\frac{\partial F}{\partial u} (t,u)h](x) &= \frac{\partial f}{\partial \xi_0} (t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))h(x) + \frac{\partial f}{\partial \xi_1} (t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))Dh(x) + \\ &+ \dots \frac{\partial f}{\partial \xi_{2m-1}} (t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^{2m-1}h(x) + \\ &+ \sum_{|\alpha|=2m} \left(\sum_{j=0}^{2m-1} \frac{\partial g_{\alpha}}{\partial \xi_j} (t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^j h(x) \right) D^{\alpha}u(x) \\ &+ \sum_{|\alpha|=2m} g_{\alpha}(t,u(x),\dots,D^{2m-1}u(x))D^{\alpha}h(x). \end{aligned}$$

Ciò in forza della teoria di Sobolev: infatti, si può stimare

$$\int_{\Omega} |D^{j-1}h(x)|^{2p} |D^{\alpha}u(x)|^p dx, \quad j = 1, \dots, 2m,$$

per mezzo di

$$\|h; W^{2m,p}(\Omega)\|^{2p} \|u; W^{2m,p}\|^p.$$

La condizione

$$\| \frac{\partial F}{\partial u} (t, u_0); \mathcal{L}(W^{2m,p}(\Omega); L^p(\Omega)) \| \text{ piccola}$$

viene letta

$$\sup_x \left| \frac{\partial f}{\partial \xi_j} (0, u_0(x), \dots, D^{2m-1} u_0(x)) \right| \text{piccola, } j = 0, \dots, 2m-1,$$

$$\max_{\substack{|\alpha|=2m \\ j=0,1,2m-1}} \sup_x |g_\alpha(0, u_0(x), \dots, D^{2m-1} u_0(x))|, \sup_x \left| \frac{\partial g_\alpha}{\partial \xi_j} (0, u_0(x), \dots, D^{2m-1} u_0(x)) \right|$$

piccolo.

BIBLIOGRAFIA

- [1] P. ACQUISTAPACE-B. TERRENI, Some existence and regularity results for abstract non-autonomous parabolic equations, J. Math. Anal. Appl. 99 (1984), 9-64.
- [2] T. KATO, Perturbation theory for linear operators, Springer-Verlag, (1966).
- [3] R. MARTIN, Jr., Nonlinear operators of differential equations in Banach spaces, J. Wiley & Sons, (1976).
- [4] A. PAZY, Semigroups of linear operators and applications to Partial differential equations, Springer-Verlag (1983).
- [5] E. SINISTRARI, W. von WAHL, On the solutions of the first boundary value problem for the linear parabolic equations (1986), preprint.
- [6] H.B. STEWART, Generation of analytic semigroup by strongly elliptic operators, Trans. A.M.S. 199 (1974), 141-162.
- [7] H. TANABE, Equations of evolution, PITMAN, (1979).
- [8] W. von WAHL, On the equation $u' - f(Au) = 0$, Boll. UMI (7), 1-A(1987), 437-441.